COLLOQUE ASI 9 DE BELFORT
http://sites.univ-lyon2.fr/asi/9/
IUT Belfort-Montbéliard

4 - 7 Octobre 2017

Organisé par Jean Claude Régnier et Régis Gras

A PROPOS DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE : QUELLES INTERPRÉTATIONS POSSIBLES ?

Gérard Vergnaud

Directeur de recherche émérite au CNRS

Dans un écrit antérieur[1], j'évoquais trois domaines susceptibles d'illustrer empiriquement l'analyse statistique implicative : le développement des compétences et des connaissances, les rapports entre les connaissances locales et les connaissances plus générales, la causalité. Les mises en garde contre les interprétations causales des liaisons statistiques me conduit à m'en tenir aux deux premiers points. Cela ne signifie pas pour autant que je tiendrais pour non avenues les relations d'ordre causal et circonstanciel ; mais il est vrai que les circonstances d'un événement ou d'un fait sont rarement univoques. Le développement lui-même n'est pas univoque. Les relations d'ordre qui le jalonnent sont nombreuses. Je n'en citerai que quelques-unes.

[1] Vergnaud, G. (2017) A propos de l'Analyse statistique implicative : Quelles interprétations possibles ? . R. Gras, J.C. Régnier, D. Lahanier-Reuter, C. Marinica, F. Guillet, (Eds) *Analyse Statistique Implicative. Des Sciences dures aux Sciences Humaines et Sociales.* Toulouse : Cépadues p 20-22,

1 Et pour commencer, certains résultats obtenus par Piaget.

La conservation des quantités discrètes : par correspondance terme à terme de deux petites quantités d'œufs et des coquetiers, on fait constater à l'enfant, qu'il y a autant d'oeufs que de coquetiers, puis on écarte les coquetiers les uns des autres. Les enfants jeunes (6 ou 7 ans) répondent qu'il y a alors soit plus de coquetiers parce que c'est plus long (plus écarté), soit qu'il y a plus d'œufs parce que c'est plus serré.

La conservation du poids : on présente deux boules identiques de plasticine dont l'enfant accepte de les considérer comme égales (avec le concours d'une balance par exemple), puis on transforme l'une des boules en un saucisson, plus long mais moins épais que la boule. Les enfants, y compris plus âgés cette fois que pour les quantités discrètes, considèrent que le saucisson (ou la boule) a un poids plus élevé ; en avançant un argument relatif à l'un des deux critères, la longueur ou la grosseur.

La conservation du volume : on présente à l'enfant deux verres identiques avec le même niveau de liquide (orangeade par exemple) ; puis on verse le contenu de l'un des verres dans un verre plus étroit. Le niveau atteint est plus élevé. Beaucoup d'enfants, jusqu'à 9 ans parfois, déclarent qu'il y a plus d'orangeade dans le verre étroit parce que « ça monte plus haut ».

Ainsi, dans les trois cas, la conservation d'une grandeur est compromise par l'interférence dans le raisonnement d'un critère (longueur, épaisseur, niveau) qui empêche l'enfant de s'intéresser à la grandeur qui est conservée dans la manipulation. Les enfants qui trouvent que « ça se conserve » avec suffisamment d'évidence utilisent parfois des arguments qu'ils estiment convaincants :

« c'est plus long mais c'est moins serré »
« on peut revenir comme c'était avant »
« on n'a rien ajouté ni rien enlevé »

Lorsqu'on évoque ces arguments avec les enfants « non conservant », ils reconnaissent la justesse de ces constats, mais gardent néanmoins leur point de vue :

« c'est quand même « plus long » ou « plus haut », ou « plus serré » ou encore « plus épais »

Le décalage au cours du développement de ces trois jugements de conservation (quantités discrètes, poids, puis volume) s'accompagne d'une sorte d'implication entre les trois compétences: la conservation du volume implique celle du poids, qui implique elle-même celle des quantités discrètes. Mais Piaget n'utilisait pas l'ASI, et pour cause : elle n'était pas née, et il ne s'intéressait guère aux statistiques.

2 Autres exemples d'ordre et d'implication :

2.1 La relation entre classe et cardinal.

J'ai moi-même expérimenté, avec des enfants de l'école élémentaire, concernant leur conception des rapports entre classe et cardinal. On connaît le théorème :

card(A union B)+card(A inter B)=card(A)+card(B)

Si l'on connaît trois cardinaux sur les quatre, on peut calculer le quatrième. La question se pose de savoir s'il existe une difficulté sensiblement différente pour le calcul du cardinal de l'union, du cardinal de l'intersection, ou du cardinal d'un des deux ensembles A et B ?

Évidemment on n'utilise pas ce symbolisme avec des enfants de 7 ou 8 ans, mais on peut leur proposer une mise en scène facile à accepter :

- pour l'union : dans une boite fermée on a mis des jetons qui sont soit rouges, soit ronds. Il y a 8 jetons rouges et 12 jetons ronds. il y a 5 ronds rouges. Combien y a-t-il de jetons en tout ?

- pour l'intersection : dans une boite fermée on a mis 8 jetons rouges et 12 jetons ronds. Il y a 15 jetons en tout. Combien y a-t-il de jetons rouges ?

- pour l'un des cas A ou B, les jetons rouges par exemple : dans une boite fermée on a mis des jetons rouges et des jetons ronds. Il y a 5 ronds rouges et 15 jetons en tout ; il y a 12 jetons ronds. Combien y a-t-il de jetons rouges ?

C'est le raisonnement qui permet de calculer le cardinal de l'intersection qui est le plus difficile pour les élèves. Cette compétence implique les deux autres compétences, et notamment la plus accessible, le calcul de l'union connaissant les cardinaux de A, de B, et de l'intersection. L'implication signifie que l'on n'a pas l'une sans l'autre, statistiquement en tous les cas.

Un autre cas spectaculaire est celui des relations additives de type « état initial, transformation, état final », qui demandent une addition ou une soustraction, comme dans les six cas présentés ci-dessous.

2.2 Structures additives

Six exemples de problèmes additifs
état-transformation-état

Pierre avait 6 billes ; Il joue une partie avec Robert et en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?

Suzanne avait 9 billes ; elle joue une partie avec Stéphanie et en perd 3. Combien en a-t-elle maintenant ?

Andrée avait 7 billes ; elle joue une partie avec Thierry. Elle en a maintenant 11. Que s'est-il passé au cours de la partie ? A-t-elle gagné ou perdu des billes ? et combien de billes ?

Thierry avait 16 billes ; après avoir joué une partie avec Andrée, il en a 12 ; Que s'est-il passé au cours de la partie ? A-t-il gagné ou perdu ? et combien de billes ?

Stéphanie vient de gagner 3 billes en jouant avec Suzanne. Elle en a maintenant 10. Combien en avait-elle avant de jouer ?

Robert vient de perdre 5 billes en jouant avec Pierre ; Il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?

Ce sont les cas de recherche de l'état initial, comme dans les problèmes « Stéphanie » et « Robert » qui sont les plus délicats pour les enfants des deux premières classes de l'école élémentaire CP et CE1, parfois jusqu'au CE2 pour certains élèves en difficulté ; notamment lorsqu'on utilise des nombres plus grands que ceux retenus dans les exemples ci-dessus, ou des domaines plus délicats comme des déplacements le long d'un parcours géographique.

Une différence significative et préoccupante de la place relative des connaissances générales et des connaissances locales dans l'enseignement et l'apprentissage

Dans l'enseignement et dans les manuels, les connaissances et compétences générales précèdent le plus souvent les applications locales. Au contraire, dans l'apprentissage et dans les pratiques de beaucoup d'enseignants, les situations de découverte et les connaissances locales précèdent le plus souvent les connaissances générales. Pour introduire les relations et idées nouvelles, on privilégie davantage les exemples que dans les manuels. Cet ordre inverse ne signifie pas nécessairement implication, mais il n'est pas innocent.

2.3 Ordre total et ordre partiel

Comme on est plus vieux aujourd'hui qu'hier, on a tendance à privilégier l'ordre total comme structure de base du développement. Pourtant l'ordre partiel est une structure plus réaliste. Il y a beaucoup d'exemples d'ordre partiel au cours du développement, y compris dans la vie adulte, mais je vais présenter un exemple ancien : la formation du concept de droite numérique. Régis Gras qui m'avait réclamé un article à l'époque me pardonnera peut–être ma défaillance d'alors. Cet exemple pose aussi la question technique et statistique de l'évolution des distributions observées à des niveaux scolaires successifs.

2.4 Le placement de données numériques ou quasi numériques sur une droite.

L'exemple que je vais analyser maintenant intéresse justement de nombreux domaines, aussi bien de sciences humaines que de sciences physiques ou biologiques : témoins l'histoire, avec la frise historique, ou encore l'économie et la géographie, avec l'usage abondant de graphiques. La raison en est que le concept mathématique de droite numérique, c'est-à-dire de représentation des nombres réels par une droite orientée, fondement de la synthèse conceptuelle entre la géométrie et l'algèbre, s'est révélé productif pour toutes les représentations symboliques utilisant les propriétés métriques et les propriétés ordinales de l'espace.

L'étude des difficultés des élèves, et des conceptualisations laborieuses qu'ils doivent élaborer dans des situations de représentation de données, permet de comprendre des aspects essentiels de la genèse de cette construction culturelle. Ce qui est tenu pour transparent par certains enseignants, ne l'est évidemment pas pour les enfants. Le cadre théorique des champs conceptuels permet de suivre certaines étapes du processus d'appropriation.

Dans une recherche menée auprès de six classes de CM2, de sixième et de cinquième, nous avions demandé aux élèves de placer sur une bande de papier de 60 cm de long, soit des poids de bébés à la naissance, soit des âges d'enfants gardés à domicile par une professionnelle de la garde d'enfants, soit des lancers de javelot de sportifs de haut niveau, soit enfin des dates de naissance. Les feuilles n'étaient pas graduées à l'avance, et une ligne droite tracée tout au long de la feuille était le seul repère. On demandait aux enfants de graduer cette ligne en prenant soit un cm pour 100 grammes dans le cas des poids de bébés, soit un cm pour un mois dans le cas des âges d'enfants et des dates de naissance, soit un cm pour 10 cm dans le cas des lancers de javelot.

Dans deux cas, compte tenu de la longueur de la feuille, de l'échelle, et des données proposées aux élèves, il était possible de placer sur la bande à la fois le zéro-origine et les sept données proposées :

- bébés : 800 g, 1 kg et 700 g, 1 kg et 900 g, 3 kg et 100 g, 3 kg et 450 g, 3 kg et 700 g, 4kg et 400 g ; échelle 1 cm pour 100 grammes ;
- âges d'enfants : 8 mois, 1 an et 7 mois, 1 an et 11 mois, 3 ans et 1 mois, 3 ans et 4 mois et demi, 3 ans et 7 mois, 4 ans et 4 mois ; échelle 1 cm pour 1 mois ;

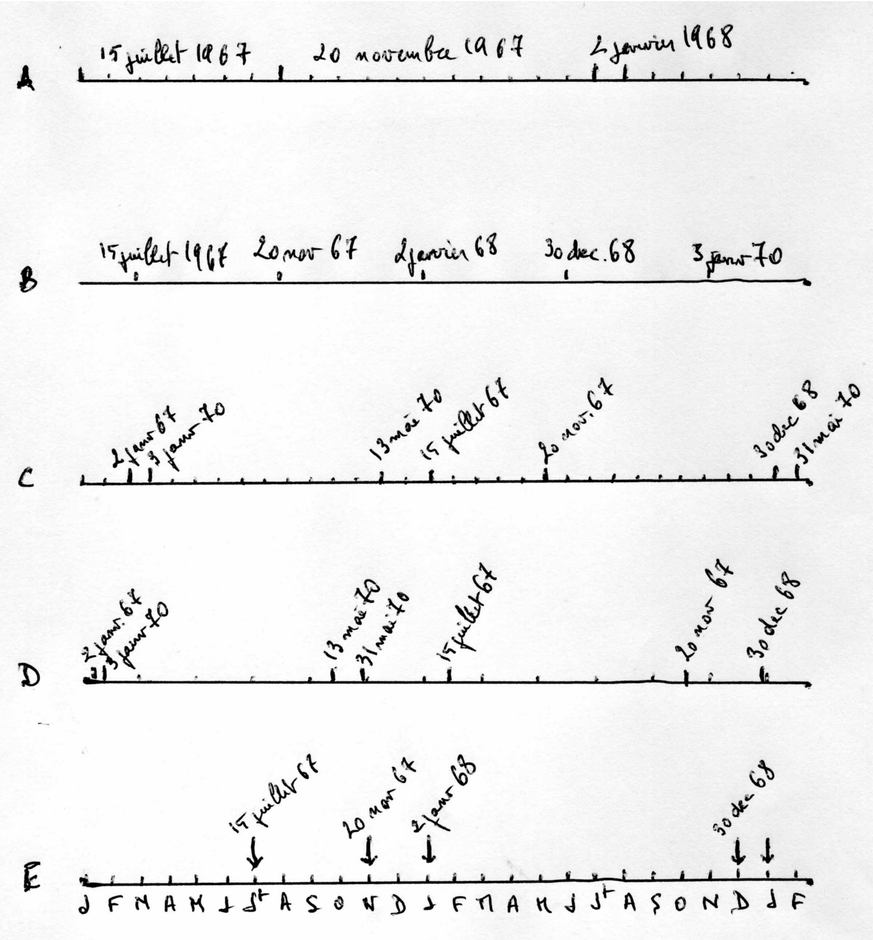
Dans les deux autres cas, c'était impossible : l'échelle choisie ne permettait pas de placer le zéro, et aucune origine naturelle n'était précisée :

-lancers de javelot : 67 mètres et 75 cm, 67 m et 90 cm , 68 m et 10 cm, 68 m et 95 cm, 70 m et 10 cm, 70 m et 55 cm, 70 m et 60 cm ; échelle 1 cm pour 10 cm ;

-dates de naissance : 15 juillet 1967, 20 novembre 1967, 2 janvier 1968, 30 décembre 1968, 3 janvier 1970, 13 mai 1970, 31 mai 1970 ; échelle 1 cm pour 1 mois.

Nous faisions l'hypothèse que les deux dernières situations seraient d'une difficulté plus grande que les deux premières, en raison justement du problème délicat de l'origine. En même temps nous cherchions à apprécier si les données temporelles (âges, dates de naissance) rendaient la tâche plus facile ou plus difficile.

La variété des productions des enfants est à elle seule impressionnante puisque, placés devant une situation inhabituelle pour eux les élèves improvisent et font feu de tout bois. Voici à titre d'exemples certains protocoles recueillis pour les dates de naissance :



Dans le protocole A, les dates sont représentées par des segments de droite mis bout à bout, dont la longueur correspond au 7ème mois de l'année (juillet), puis au onzième (novembre), etc. Le jour et l'année ne sont pas pris en compte.

Dans le protocole B, seul est retenu l'ordre des dates de naissances, lesquelles sont placées à intervalles réguliers, sans souci des différences de durée entre dates.

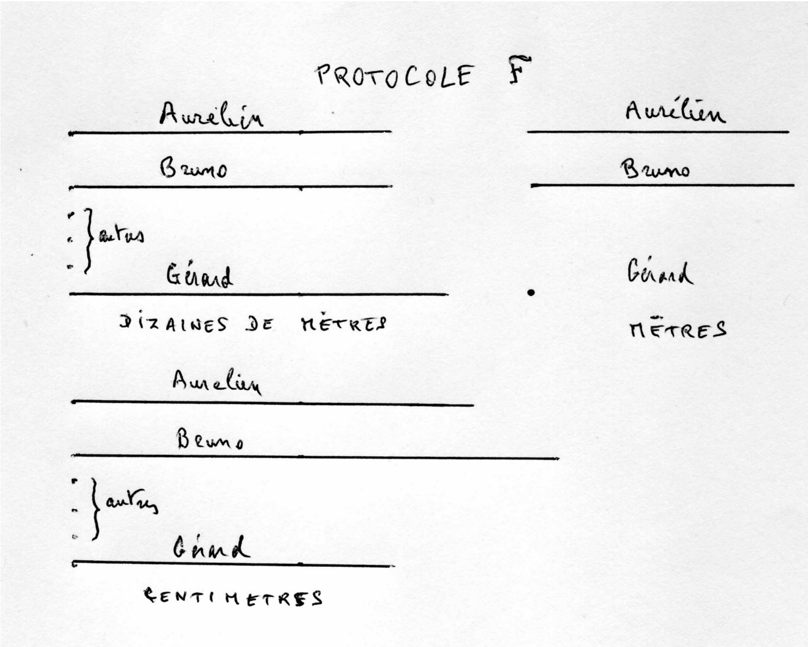
Dans le protocole C, seul le jour du mois est retenu ; le mois et l'année ne sont pas pris en compte.

Dans le protocole D, les dates sont projetées comme des anniversaires sur une seule année. Un effort est fait pour distinguer deux dates du même mois, comme le 13 mai et le 31 mai.

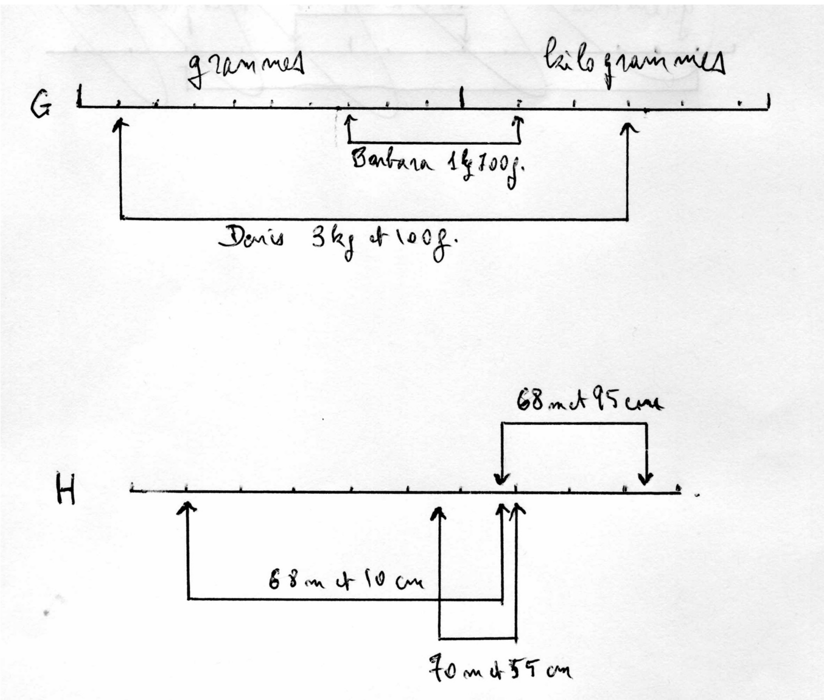
Dans le protocole E, un effort est fait pour retenir un ensemble de dates sur plusieurs années, mais les mois sont représentés par des points, et non par des intervalles, de telle sorte que l'on a une échelle d'ordre, issue de la récitation de la suite des mois. Ce type de protocole constitue évidemment un progrès par rapport au protocole B, mais comme lui, il n'utilise, comme marques, que les propriétés ordinales du signifiant spatial.

On observe d'autres solutions, surprenantes et néanmoins très systématiques, comme si les élèves, après avoir imaginé une manière d'interpréter la situation de manière totalement opportuniste, devenaient, avec cette interprétation, totalement méthodiques dans son application.

Voici plusieurs cas intéressants :



F- Décomposition de chaque lancer de javelot en trois parties



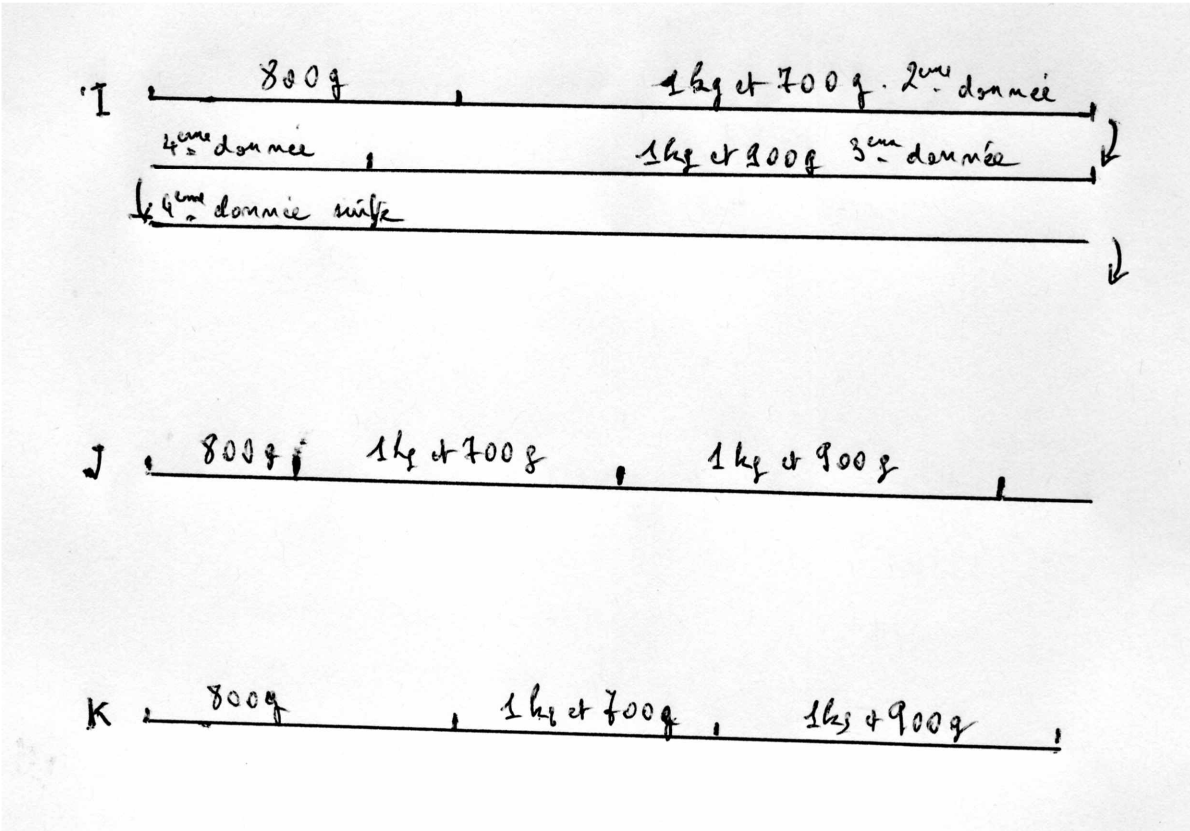
G - Deux échelles séparées pour les kilogrammes et les grammes

H- Même échelle de 0 à 100 pour les mètres et les centimètres

Tous ces cas de figure pourraient être considérés comme des anecdotes, mais certaines difficultés sont visiblement récurrentes, comme la coordination des systèmes d'unités : kilogrammes et grammes, mètres et centimètres, mois, jours, années. D'autres difficultés sont moins immédiatement visibles, qui éclairent pourtant de manière intéressante l'appropriation progressive de ce système de représentation, sa « genèse » en quelque sorte. Ce qui suit vise à en rendre compte.

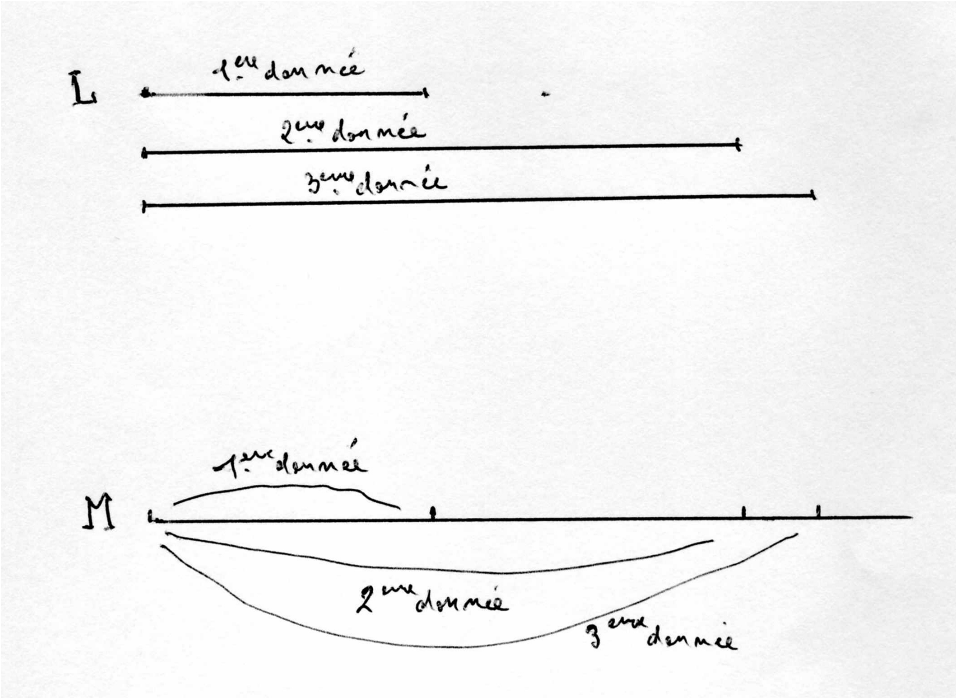
1-Certains protocoles recueillis ne représentent que l'ordre des données, de la plus petite à la plus grande, soit par un point pour chaque donnée, soit par des régions ordonnées de l'espace de gauche à droite en général. Le protocole B en est un exemple.

2-Un grand nombre de productions d'élèves résultent de la mise bout à bout de segments de droite représentant les données, l'une après l'autre. C'est le cas pour les données mesurables comme les poids de bébés ou les lancers de javelot ; mais, de manière surprenante, c'est aussi le cas pour les dates de naissance comme nous l'avons vu avec le protocole A.



Comme la place manque pour mettre bout à bout les segments de droite représentant les données, les élèves peuvent soit continuer sur plusieurs lignes les segments incomplets (protocole I), soit changer d'échelle (protocole J), soit encore ne placer bout à bout que les parties décimales des données (protocole K).

3-Une prochaine catégorie de productions est issue du souci de placer ces segments l'un au-dessus de l'autre à partir d'un même repère de départ ; ou bien du souci d'indiquer que la deuxième donnée n'est pas représentée seulement par la partie nouvelle, mais aussi par le segment correspondant à la première donnée.

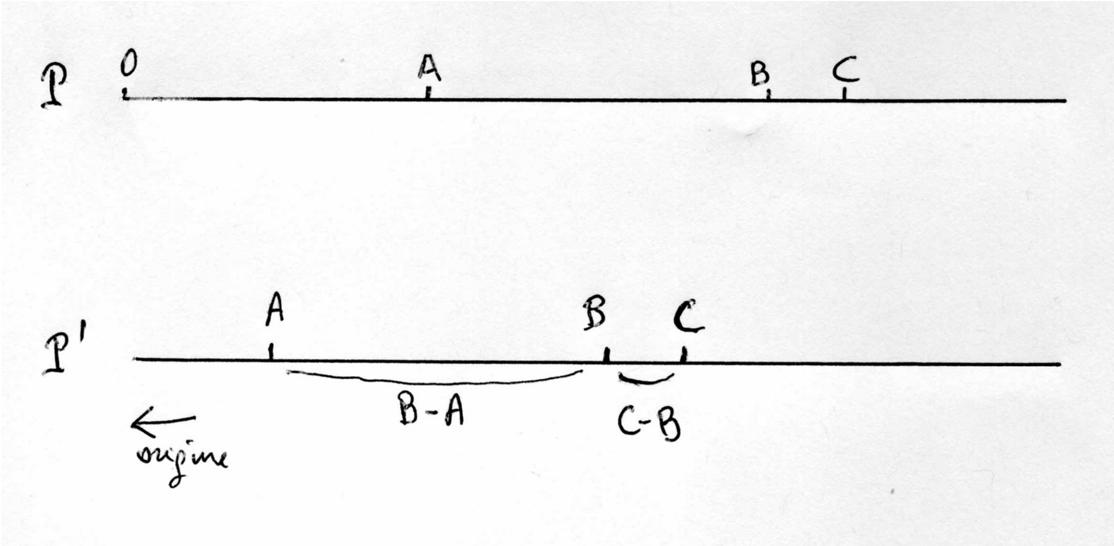


On peut caractériser cette étape comme l'adoption, en acte, du principe d'inclusion des signifiants (les segments de droite représentant les données).

C'est un progrès important, mais cette solution graphique n'est pas satisfaisante puisqu'elle ne fonctionne qu'à la condition que le repère de départ soit considéré comme invariant. Or justement, il n'a pas encore le statut d'origine.

4-La prochaine catégorie de productions marque donc un nouveau saut conceptuel, l'adoption du principe de ponctualisation : comme ils ont un même point de départ à gauche, les segments emboîtés sont en correspondance biunivoque avec leurs extrémités à droite, et il est donc possible de faire jouer à ces points d'arrivée le rôle de signifiants joué par les segments.

L'avantage de cette solution est que l'élève récupère de manière simple, avec la succession des points, la propriété d'ordre que certains élèves s'étaient contentés de représenter, comme dans le protocole B. Sont ainsi coordonnées les propriétés mesurables et les propriétés d'ordre du signifiant spatial, qui représentent ainsi les propriétés correspondantes des données numériques (poids de bébés) ou quasi-numériques (âges des enfants). Dans ces deux cas, heureusement pour les élèves, l'échelle choisie permet de représenter à la fois l'origine et les données.
Le protocole P ci-après illustre cette étape.
Le protocole P' va plus loin, et représente une nouvelle étape dans la conceptualisation, justement parce que, cette fois, l'échelle proposée ne permet pas de placer à la fois l'origine et les données sur la même bande de papier : des lancers de javelot de plus de 60 mètres avec une échelle de 1 cm pour 10 cm, Il faut alors repousser l'origine en dehors de la feuille.



5-Cette dernière grande étape est donc celle dans laquelle l'enfant place la première donnée quelque part à gauche, soit le point A, puis la seconde donnée B à partir de A, à une distance égale à la différence B-A ; et ainsi de suite pour C, D et les autres données. Les intervalles entre points représentent des différences.

Tout se passe comme si l'élève avait alors effectué un changement d'origine.

3 Conclusion

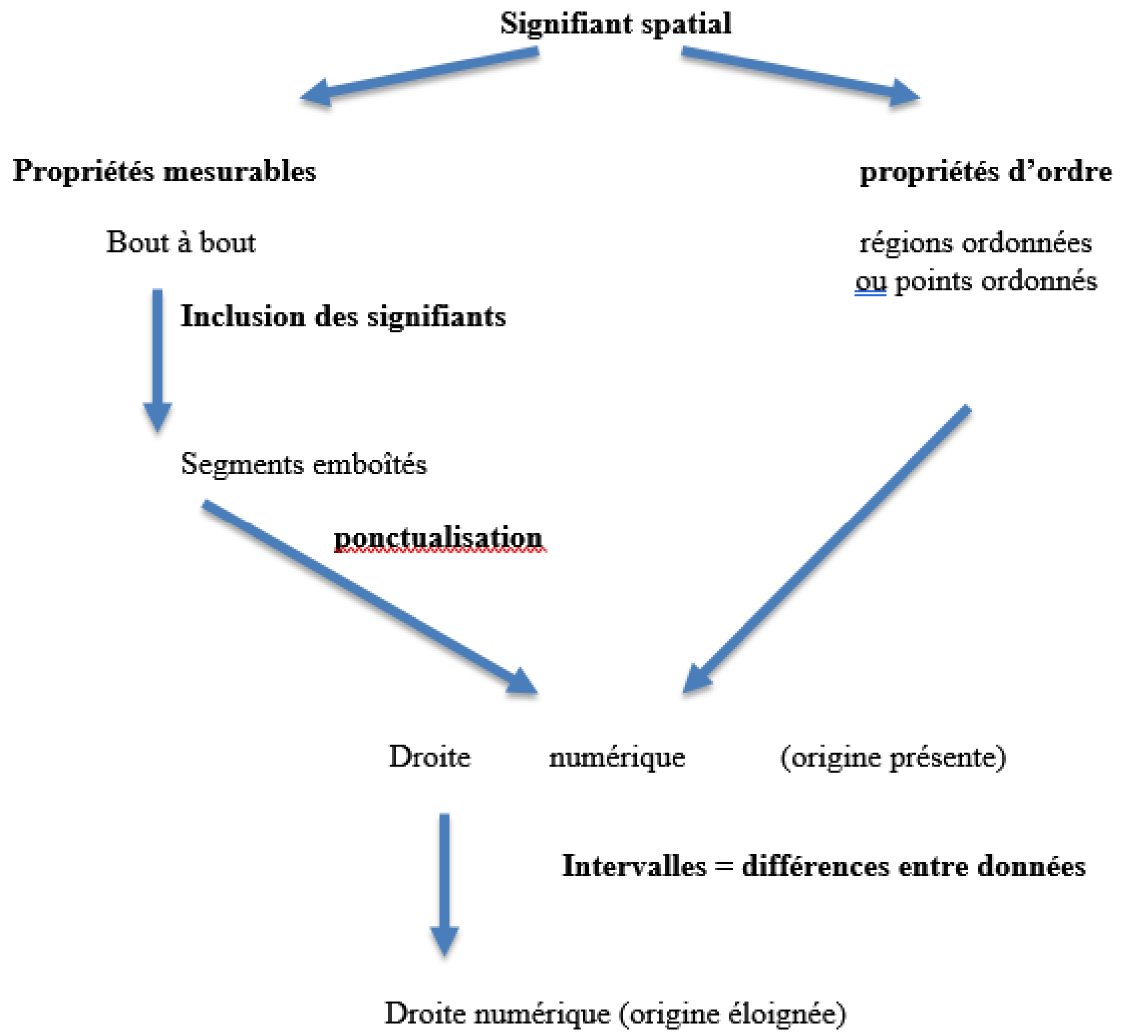
La droite numérique n'est pas un système de représentation transparent pour les élèves, mais résulte d'une lente construction, plus délicate qu'il n'y paraît. Cette construction, opérée par les élèves avec l'aide de l'enseignant, demande que soient levées plusieurs interprétations restrictives.

Comment un segment de droite peut-il représenter à la fois une donnée et une partie d'autres données ? Comment un nombre peut-il être associé à un point alors que le point a une mesure nulle ?

Après une séquence didactique de plusieurs heures, sur plusieurs semaines, ces interprétations sont levées pour certains élèves, pas pour tous. Même chez certains élèves de cinquième, des ambigüités demeurent.

L'exemple de la droite numérique, et des représentations graphiques qui lui sont associées, illustre ainsi le fait que les processus de conceptualisation concernent les systèmes de signifiants transmis par la culture, et pas seulement les contenus conceptuels représentables par ces signifiants. Le paradoxe est que les signifiants contribuent à la conceptualisation alors qu'ils ne sont pas transparents. C'est en rendant explicites certaines propriétés et relations pertinentes des signifiés représentés, qu'ils contribuent à la conceptualisation. Pour saisir ces processus paradoxaux, il faut identifier avec soin quelles propriétés du signifiant représentent quelles propriétés du signifié : ainsi en est-il, pour la droite numérique, des propriétés mesurables de l'espace et de ses propriétés d'ordre.

Le diagramme ci-dessous résume les plus importantes étapes du processus de conceptualisation nécessaire :




05.10.2017

Références

Moreira M., Caballero C., Vergnaud G. (2009) *La teoría de los campos conceptuales y la ensenânza/aprendizaje de las ciencias*. Universidad de Burgos, Estudios y Monografías.

Moreira Marco Antonio « *La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área* (http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf) »; Universidad Federal de io Grande do Sul.

Otero María Rita (2010) « La Notion de Situation: analysée depuis la Théorie des Champs Conceptuels, la Théorie des Situations, la Dialectique Outil-Object et la Théorie Anthropologique du Didactique (https://7bd81d52-a-62cb3a 1a-s-sites.googlegroups.com/site/reiecniecyt/nro-5-volumen-1/REIEC_anio5_num1_art4.pdf) »; Revista Electrónica de Investigacion en Educación en Ciencias 5(1): 49-54.

Ricco G., Vergnaud G., Rouchier A. (1983). *Représentations du volume et arithmétisation - entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans*. In Vergnaud G. (Ed) Didactique et acquisition du concept de volume. Numéro spécial de Recherches en Didactique des Mathématiques, 4, pp. 27- 69.

Vergnaud G (1990). *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques. volume 10.2, 133-170.

Vergnaud G « *¿Por qué hablar de los campos conceptuales y no de los conceptos*? », conferencia en el Centro Nacional de Investigaciones Psicológicas de la Universidad de Burgos.

Vergnaud G. (1966). Utilisation dans l'apprentissage de l'information apportée par les actions et par les événements extérieurs, L'Année Psychologique, 66, pp. 37-55.

Vergnaud G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang, . Traducción en español (1991) *El Niño las Matemáticas y la Realidad*. México, Trillas; En portugués (2010) *A criança, a matematica e a realidade*. Curitiba, UFPR. Egalement en italien et en russe

Vergnaud G. (1986). Psicología do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matematicas. Um exemplo: as estruturas aditivas. In Analise Psicologica, 1 (V): pp. 75-90.

Vergnaud G. (1989*). La formation des concepts scientifiques. Relire Vygotski et débattre avec lui aujourd'hui. Enfance, 1-2, 111-118.*

Vergnaud G. (2000) Lev Vygotski pédagogue et penseur de notre temps. Paris Hachette Education. Traducción en portugués (2004) *Lev Vygotski, Pedagogo e Pensador do Nosso Tempo*. Porto Alegre; Geempa.

Vergnaud G. (2009) *The Theory of conceptual Fields*. Human Development, 52,2, p 83-94.

Vergnaud G. (2013) *Pourquoi la théorie des champs conceptuels*? Infancia y Aprendizaje 36(2),131-161, Visor, Madrid.

Vergnaud G., Recope M. (2000) *De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui*. Psychologie française (La Société Française de Psychologie a cent ans), 45, 1, 35-50.

Vergnaud G., Rouchier A., Desmoulieres S., Landre C., Marthe P., Ricco G., Samurcay R., Rogalski J., Viala A. (1983). *Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12-13 ans).* In Vergnaud G. (Ed.), Didactique et acquisition du concept de volume. Numéro spécial de Recherches en didactique des mathématiques, 4 (1), pp. 71- 120.

Vergnaud G; (2002) Forma operatoria e forma predicativa do conhecimento: O valor da experiencia na formaçao de competencias. Araucarias, 1-2, 69-89.